Serien von gleichen Würfelzahlen

RENATE MOTZER, AUGSBURG

Zusammenfassung: *Wie wahrscheinlich ist es, beim 100maligen Würfeln mindestens 4mal hintereinander die gleiche Zahl zu bekommen? Ausgehend von dieser Frage, die sich bei einer Simulation am PC im Unterricht stellte, wird hier eine rekursive Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit vorgestellt.*

1 Ausgangsfrage anhand einer Würfelsimulation

Manchen Menschen scheint das „kein Zufall mehr" zu sein, wenn sie beim Würfeln 4-mal hintereinander die gleiche Zahl würfeln. Stimmt an dem Würfel etwas nicht oder nimmt man ihn falsch in die Hand? Ähnlich kann es irritieren, wenn per Zufallsgenerator eine Würfelserie (z. B. 100 Würfe) simuliert wird und mindestens 4-mal hintereinander die gleiche Zahl erscheint.

Wie selten ist bei einem „echten" Laplace-Würfel eine Serie von 4 gleichen Ergebnissen? Ist es schon was Ungewöhnliches?

Diese Frage stellte sich auch bei mir im Unterricht, als ein Schüler sich eine Excel-Liste von 100 Würfelsimulationen genauer anschaute. Er zweifelte an der Güte der Simulation, d. h. des Zufallsgenerators. Spontan konnte ich ihm keine Antwort geben, wie wahrscheinlich denn eine Serie von 4 gleichen Würfelergebnissen ist.

Eine Antwort auf diese Frage zu finden, stellte sich als gar nicht so einfach heraus. Meine ersten Ansätze scheiterten alle daran, dass sie nicht zu dem Ergebnis vieler Simulationen passten.

Erfreulicherweise entspann sich eine Diskussion im Kollegenkreis und einige Kollegen suchten wie ich nach einer passenden Formel.

Nach einiger Zeit gab es 3 Lösungen im Kollegium. Eine passte leider nicht zu den Simulationsergebnissen, die beiden anderen führten auf leicht unterschiedlichen Wegen zum gleichen Ziel. Gemeinsam war beiden Lösungen, dass sie rekursiv vorgingen.

Auch der Schüler (ein sehr begabter und sehr interessierter Schüler; seine Mitschüler hatten bei der Diskussion um diese Aufgabe schnell „abgeschaltet", waren aber fasziniert, wie hartnäckig er an diesem Problem dran blieb) kam zu einem ähnlichen Ergebnis.

2 Eine rekursive Lösung des Problems

Hier soll die gefundene Lösung erläutert werden: Gesucht wird ein rekursiver Ausdruck für $w(n)$, mit der man für eine natürliche Zahl n berechnen kann, wie wahrscheinlich es ist, bei n Würfen mindestens 4 gleiche Zahlen hintereinander zu bekommen.

Klar, dass es erst ab 4mal Würfeln geht, 4 gleiche Zahlen hintereinander zu bekommen, also ist

$w(1) = w(2) = w(3) = 0.$

Bei $n = 4$ gilt: Die 1. Zahl ist egal, die anderen 3 müssen gleich sein: Die Wahrscheinlichkeit beträgt daher $w(4) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Bei 5mal Würfeln kann es schon bei den ersten 4 Würfen 4 gleiche geben $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$ oder der 2. Wurf ist anders als der erste $\left(\left(\frac{5}{6}\right) \text{Wahrscheinlichkeit}\right)$. Die 2. Zahl ist ansonsten beliebig, die folgenden müssen ihr gleich sein $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$.

Insgesamt: $w(5) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Bei 6mal Würfeln könnte es schon bei den ersten 5 Würfen geklappt haben (w(5)) oder der 3. Wurf ist anders als der 2. $\left(\frac{5}{6}\right)$ und ab dem 4. sind alle gleich dem 3. $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$.

Insgesamt: $w(6) = w(5) + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Bei 7mal Würfeln könnte es wiederum schon bei den ersten 6 Würfen geklappt haben (w(6)) oder der 4. Wurf ist anders als der 3. $\left(\frac{5}{6}\right)$ und ab dem 5. sind alle gleich dem 4. $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$.

Insgesamt: $w(7) = w(6) + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

Bei 8mal Würfeln ändert sich die Situation insofern, als für den Fall, dass die 4 gleichen erst mit dem 5. beginnen, ausgeschlossen werden muss, dass die ersten 4 schon gleich waren. Außerdem muss dann die 5. Zahl wieder anders sein als die 4. $\left(\frac{5}{6}\right)$.

Insgesamt: $w(8) = w(7) + (1 - w(4)) \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

Diese Überlegung kann verallgemeinert werden:

Bei n Würfen kann die 4er-Serie schon bis zu $n - 1$ Würfen eingetreten sein ($w(n - 1)$) oder die letzten 4 Zahlen sind die erste 4er-Serie. Für den zweiten Fall darf es für die $n - 4$ Zahlen zu Beginn noch keine 4er-Serie geben ($1 - w(n - 4)$), die $(n - 3)$-te Zahl muss anders sein als ihr Vorgänger $\left(\frac{5}{6}\right)$ und die nächsten 3 müssen ihr gleich sein $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$.

Insgesamt: $w(n) = w(n - 1) + (1 - w(n - 4)) \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

Diese Formel gilt übrigens schon ab $n = 5$, wie man im Rückblick durch Einsetzen sehen kann.

$w(100)$ beträgt 31,6 %, ist also bei weitem nicht so gering, wie man vielleicht erwarten würde. Fast jede dritte Hunderterserie hat eine Zahl mindestens 4-mal hintereinander.

Analog kann man auch die Wahrscheinlichkeit für eine 5er-Serie bestimmen:

$w(1) = w(2) = w(3) = w(4) = 0,\ w(5) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Ab $n = 6$ gilt:

$w(n) = w(n - 1) + (1 - w(n - 5)) \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$

Sie beträgt bei 100 Würfen ca. 6 %, ist also schon deutlich geringer.

Das Auftauchen einer 5er-Serie spricht aber noch nicht signifikant dafür, dass es sich nicht um einen Laplace-Würfel (bzw. um die Simulierung eines solchen) handelt.

Zugegeben, eine ungewöhnliche Formel im Unterricht, wo man den Umgang mit rekursiven Funktionen nicht gewohnt ist.

Aber es kann eine spannende Aufgabe für begabte Schülerinnen und Schüler sein, die dadurch auch in einen neuen Bereich des mathematischen Denkens eingeführt werden. Für die Klasse neu war an dieser Stelle, dass man sein Ergebnis mit den relativen Häufigkeiten vergleicht, die sich durch Simulation des Zufallsexperiments ergeben. Für die Frage, ob bei der Suche nach der Formel die vorgenommene Modellierung des Zufallsexperiments passend ist, kann (und sollte!) so eine Simulation ein geeignetes Kontrollexperiment sein (soweit die Simulation nicht einen Fehler der Modellierung direkt übernimmt).

Die zum Würfelproblem zugehörige Simulation und die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit Excel, dazu passende Aufgaben für begabte Schülerinnen und Schüler so wie den Ansatz meines Kollegen Gerald Friedel sind zu finden auf der Seite http://www.lehrer-online.de/serien-gleicher-wuerfelzahlen.php.

Anschrift des Verfassers

Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
86135 Augsburg
Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de